Oscilaciones Forzadas y Resonancia

Ignacio Arata
ignacioarata@hotmail.com

Diego Croceri
pulicipo@ciudad.com.ar

Santiago Folie
sf0lie@alwaysgolfing.com

Universidad Favaloro - Julio 2001

Resumen

En este trabajo se estudia la variación de la amplitud de un oscilador armónico f0rzado en función de la frecuencia y se determina la frecuencia de resonancia. El oscilador f0rzado se construye reciclando un amperímetro de aguja excitado por un generador de funciones[1].

Introducción

La teoría de los movimientos armónicos forzados es fundamental en muchos ámbitos de la física y la ingeniería.

Un oscilador amortiguado por sí solo dejará de oscilar en algún momento debido al roce, pero podemos mantener una amplitud constante aplicando una fuerza que varíe con el tiempo de una forma periódica a una frecuencia definida. Un ejemplo cotidiano es un columpio, que podemos mantenerlo con amplitud constante con solo darle unos empujoncitos una vez cada ciclo. El movimiento resultante se llama oscilación forzada. Si se suprime la excitación externa, el sistema oscilará con su frecuencia natural.

Si la fuerza impulsora se aplica con una frecuencia cercana a la natural, la amplitud de oscilación es máxima. Así mismo si la frecuencia aplicada coincide con la natural la amplitud de velocidad se hace máxima. Este fenómeno se denomina resonancia.

Nosotros trataremos de estudiar la resonancia y las oscilaciones forzadas a través de un sistema simple, que se construyó reciclando un amperímetro de aguja.

Experimento

La materialización de sistemas de este estilo suele ser complicada. Para fabricarlo utilizamos las propiedades de un amperímetro de aguja. Las excitaciones las realizamos usando un generador de funciones. Determinamos las velocidades midiendo los voltajes a través de una pc. Ver *figura 1*.

La aguja del galvanómetro juega el papel del péndulo oscilante. El movimiento de ella genera en la bobina una fem inducida Vm. La diferencia de potencial V será proporcional a esta fem inducida. Es importante entonces resaltar cómo medimos Vm. Los parámetros medidos directamente por la pc fueron Vr y V. Luego elegimos resistencias específicas de manera que a través de las caídas de potencial en esas resistencias se pudiese llegar al valor de Vm. Para comprobarlo, mientras aplicábamos una fuerza con el generador, sosteníamos la aguja del amperímetro con la mano para que no se moviera y la velocidad que medíamos era igual a cero.

La caída de potencial a través de la resistencia R (Vr) es proporcional a la corriente y a la fuerza impulsora.

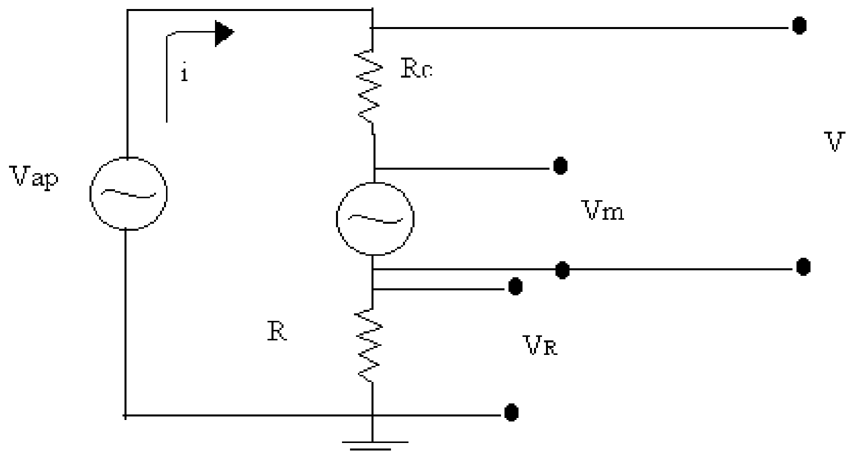

Figura 1 Circuito modelo. Rc= 2.03 KΩ , R= 9.83 KΩ. Vm es proporcional a la velocidad de la aguja (dθ/dt). Vr es proporcional a la fuerza restauradora Fap, la cual a su vez es proporcional a la corriente.

Las razón por la que la fem inducida Vm es proporcional a la velocidad de la aguja es que Vm es igual, por la ley de Faraday, a menos la derivada del flujo del campo magnético, es decir, la razón de cambio de flujo magnético.

$$Vm = -\frac{d\phi}{dt}$$

El movimiento de la aguja genera un cambio en el área de la espira perpendicular al campo magnético (veáse *figura 2*), entonces el flujo es proporcional al movimiento de la aguja. Así, la fem inducida en la bobina (Vm) es proporcional a la velocidad de la aguja.

La ley de Lorentz dice que F α i B l. Entonces, midiendo la corriente obtengo un valor proporcional a la fuerza impulsora.

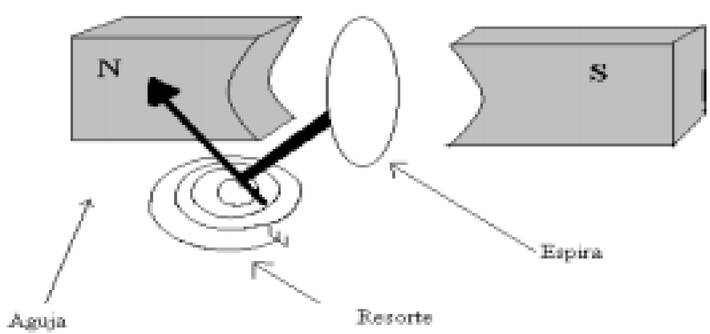

Figura 2 *Gráfico de la estructura interna del galvanómetro.*

Todo el sistema está amortiguado según la ecuación

$$I \cdot \ddot{\theta} - b \cdot \dot{\theta} - k \cdot \theta = 0$$

donde I es el momento de inercia de la aguja y la espira, b es el coeficiente de amortiguación dado por las resistencias R y Rc y el roce mecánico del sistema y k es la constante de elasticidad del resorte. Este amortiguamiento es compensado por la fuerza impulsora F_{ap}, aplicada con el generador de funciones. Para mantener un movimiento con amplitud constante se debe aplicar una corriente alterna que actúe como fuerza impulsora y entregue energía al sistema. Así, la ecuación que queda es:

$$I \cdot \ddot{\theta} - b \cdot \dot{\theta} - k \cdot \theta = F_{ap} \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t)$$

donde F_{ap} es proporcional a la corriente.

Este sistema oscilante es análogo al movimiento armónico simple de un resorte, con una fuerza restauradora que mantiene la amplitud constante.

Oscilaciones Libres

Primeramente tomamos mediciones de la frecuencia natural con la que oscila la aguja, sin la presencia del generador de funciones (Vap). Desplazamos la aguja con la mano. Medimos las diferencias de potencial Vr y V, usando un sistema de adquisición de datos conectados a una pc. Con la herramienta FFT realizamos un análisis de Fourier para encontrar dicha frecuencia.

Oscilaciones Forzadas

Conectamos el generador de funciones y tomamos mediciones para distintas frecuencias, manteniendo siempre amplitud constante. Nuestro objetivo es estudiar si las amplitudes de la velocidad son máximas a frecuencias parecidas a la natural.

Resultados

Como mencionamos, la primera medición que hicimos fue de la frecuencia natural, es decir, sin el generador de funciones. En la *figura 3* se muestra la variación de la velocidad en el tiempo, determinada a través de la medición de V en función del tiempo.

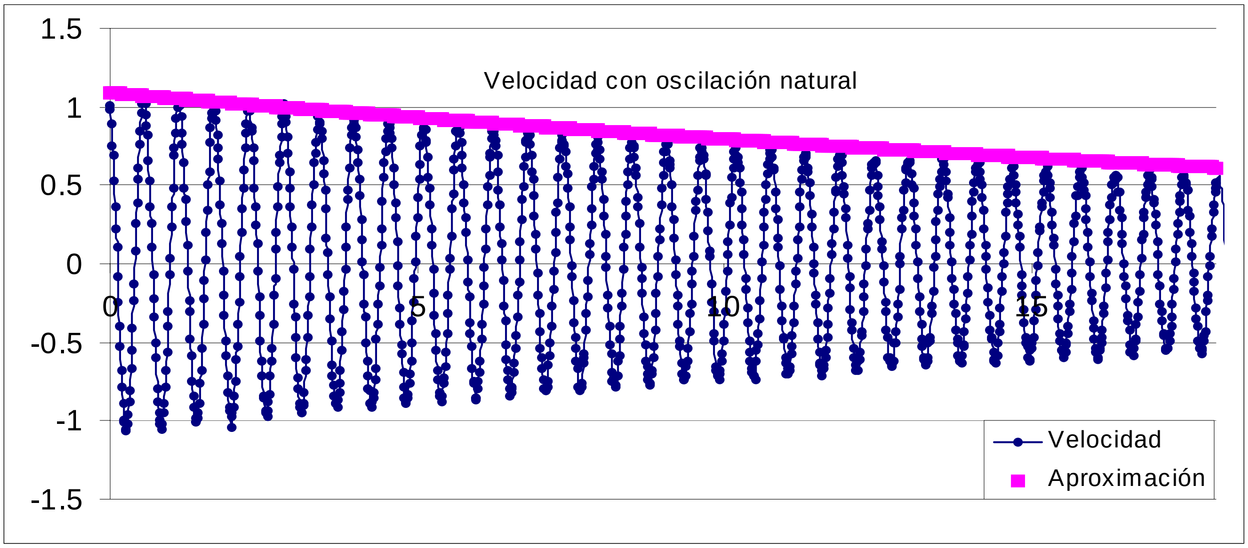

Figura 3 *Velocidad en función del tiempo para oscilación natural. La constante de amortiguación* $\gamma = 0.029 \pm 0.003$. *La frecuencia natural determinada con la herramienta FFT es* $f_0 = 1.78 \pm 0.05$ *Hz*

La frecuencia natural la determinamos usando un análisis de Fourier y un ajuste manual de los datos obtenidos. Llegamos a que ésta es 1,78 Hz, con un error de 0.05 Hz. De la *figura 3* también pudimos determinar un dato importante como lo es la constante de amortiguación, cuyo valor es de 0.029 ± 0.003, la cual obtuvimos a partir de manipular una función exponencial decreciente que ajuste con el decrecimiento de la amplitud de la velocidad, (*Aproximación en la figura 3).*

Con el generador de funciones excitamos al sistema con distintas frecuencias, incluyendo la natural y su entorno. En la *figura 4* se presentan las distintas amplitudes de la velocidad para distintas frecuencias aplicadas.

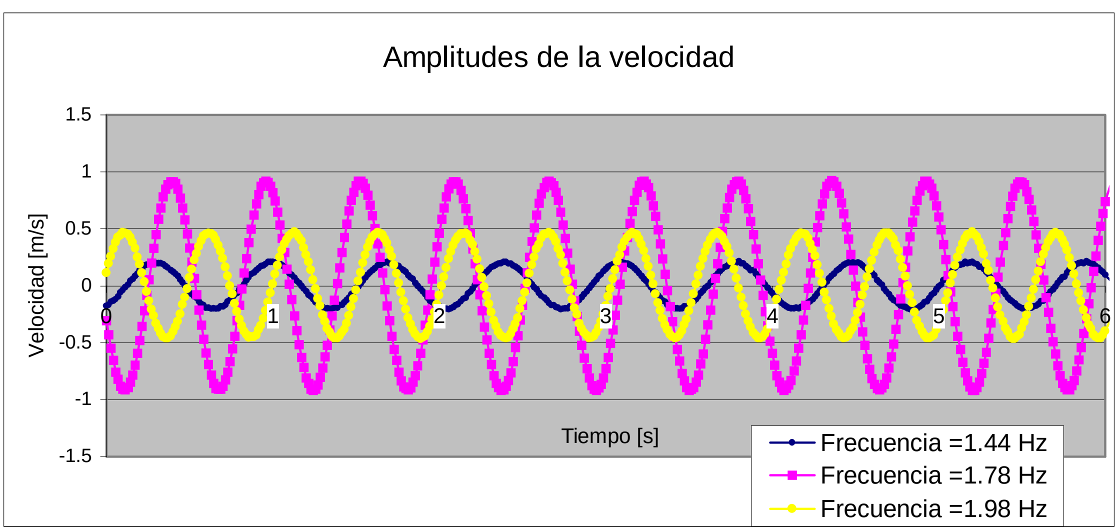

Figura 4 *Amplitud de la velocidad para distintas frecuencias excitadoras.*

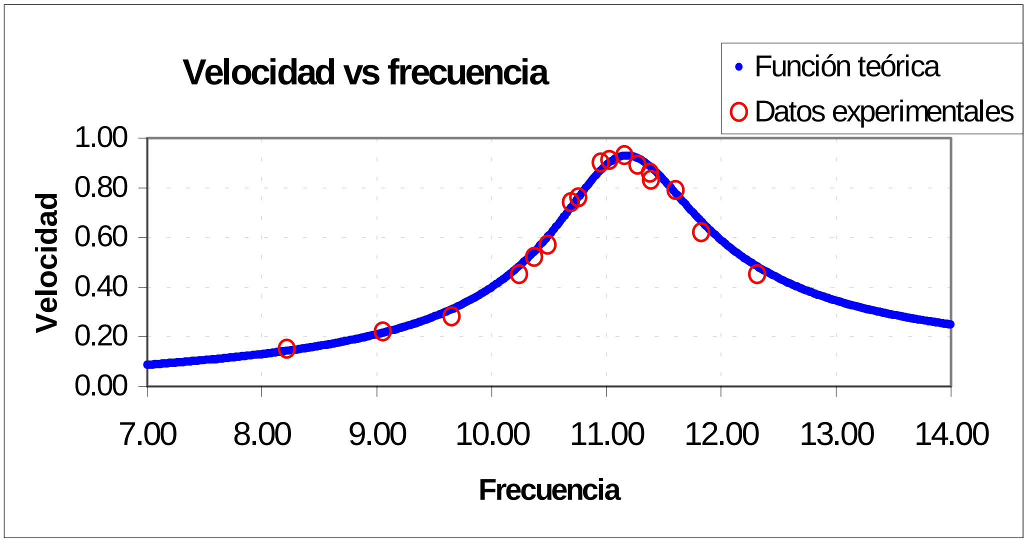

Figura 5 *Variación de la amplitud de la velocidad con la frecuencia. La frecuencia natural angular(igual a 2 . π .f_0) es igual a 11.2 ± 0.2 Hz.*

γ = 0.030 ± 0.002

Discusión

Como era de esperar las amplitudes de la velocidad del movimiento son máximas cuando la frecuencia de excitación del generador es parecida a la natural, véanse *figura 4* y 5, a este fenómeno se lo denomina resonancia. Las amplitudes deben obedecer a la siguiente fórmula:

$$A = \frac{B \cdot \omega}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + 4 \cdot \gamma^2 \cdot \omega^2}}$$

Donde ω es la frecuencia aplicada, ω_0 = 2 * π * *f0* es la angular natural, y γ es la constante de amortiguación (ver *figura 3*). Como se puede observar en la *figura 5* los datos obtenidos de manera experimental ajustan muy aproximadamente a la fórmula. Es decir, el gráfico de los datos es muy parecido al de la función evaluada en esas mismas frecuencias. La frecuencia natural y la constante de amortiguación determinadas de la *figura 3*, son parecidas a las de la *figura 5*.

De la *figura 3* se puede apreciar como las amplitudes disminuyen con el tiempo si no se aplican fuerzas impulsoras, y la constante de amortiguación γ está dada según la ecuación

$$y = A \cdot e^{-\gamma \cdot t} + B$$

donde A y B son constantes.

Algo muy discutido sobre la resonancia suele ser si la misma se da en la frecuencia natural o en frecuencias parecidas a la natural, ambas afirmaciones son verdaderas dependiendo de que se mide. Es más fácil apreciar esto en un circuito RLC, donde la amplitud de la corriente será máxima en una frecuencia y la carga será máxima en otra, que si bien es cercana no es la misma. Similarmente ocurre para un sistema mecánico con la amplitud y la velocidad.

Conclusión

Construimos un oscilador forzado reciclando un amperímetro, lo que nos evito tener que construir un sistema desde cero. Este sistema nos dio la ventaja de proporcionarnos señales eléctricas que nos permitieron estudiar con todo detalle el fenómeno de resonancia en un sistema oscilatorio forzado.

Este sistema también se puede utilizar para estudiar el movimiento libre del oscilador.

Fue posible determinar la curva de resonancia y compararla con la curva teórica llegando a una gran similitud entre ambas, con lo que verificamos su veracidad. Además observamos que las amplitudes son máximas cuando la frecuencia excitadora es parecida a la natural. Los valores de la frecuencia natural del sistema y de su constante de amortiguación son: $f_0 = 1.78 \pm 0.05$ Hz , $\gamma = 0.029 \pm 0.005$.

Sobre los movimientos libres concluimos que sin la presencia de una fuerza impulsora, las amplitudes de la velocidad van decreciendo, de igual manera la fuerza restauradora.

Bibliografía

1. *Simple mechanical forced damped oscilator with electronic output,* Ian Moore, Am. J. Phys. **62**, 140, 1993

2. *A simulation of the Tacoma Narrows bridge oscilations,* Phy. Teacher **38**, (7) 2000.

3. *Física Universitaria Novena Edición,* Sears, Zemansky, Freedman y Young. Editorial Addison-Wessley Longman. Volumenes 1 y 2. México 1999.

4. *Física versión ampliada.* Halliday, Resnick, Krane. 5ta. reimpresión. México 1998.

Agradecimientos

A Maximiliano Hasan por ayudarnos a construir el circuito eléctrico y proporcionarnos todos los materiales. A Pablo Martins. A Eduardo Rodriguez por ayudarnos con la elección del trabajo.