Teorema de las cuerdas de una circunferencia

Universidad Favaloro
Laboratorio de Física

Inés Guerra	*María Larreguy*	*Juan Mousquere*	*Santiago Paz*
ineguerra@usa.net	merigl@yahoo.com	jotaclau@mixmail.com	pazsantiago@hotmail.com

Resumen

El propósito de este trabajo es investigar tanto teórica como experimentalmente la validez del teorema de las cuerdas de Galileo cuando se tiene en cuenta el rozamiento del objeto que cae a lo largo de una cuerda de una circunferencia.

En nuestro caso, estudiamos el movimiento de una esfera que cae por una cuerda, rodando por la misma.

Introducción

Cuando se suelta una piedra ésta cae cada vez más rápidamente, con movimiento uniformemente acelerado. La inquietud de Galileo era conocer las leyes matemáticas que rigen este movimiento acelerado. Pero la caída libre de los cuerpos se produce demasiado rápido como para estudiarla en detalle sin el empleo de aparatos modernos, como por ejemplo, la fotografía instantánea, o sistemas automáticos de adquisición de datos.

A principio del siglo XVII Galileo estableció experimentalmente que la distancia recorrida por un cuerpo que desciende por un plano inclinado aumenta proporcionalmente al cuadrado del lapso empleado en recorrerlo. Para ello, experimentó con una pequeña esfera que dejaba caer sobre un plano inclinado. Realizó la experiencia para inclinaciones cada vez mayores con lo que argumentó que la relación debería cumplirse para el caso límite de un plano vertical. Su problema era como extrapolarlo al caso límite, cosa que solucionó demostrando el teorema de las cuerdas de una circunferencia.

El enunciado del teorema es [1-5]:

“El tiempo que tarda una partícula en recorrer cualquier cuerda de una circunferencia vertical es independiente del ángulo que forma la cuerda con la horizontal.”

Nuestra inquietud en este tema es como afecta la fuerza de rozamiento a la esfera ya que queremos que este experimento se asemeje lo mejor posible a la realidad misma.

Primero realizamos un análisis teórico del problema teniendo en cuenta la fuerza de roce. Luego construimos un dispositivo experimental para verificar los resultados teóricos.

Análisis teórico del teorema considerando condiciones de rozamiento

Sea una esfera de masa m que rueda por un plano inclinado (es preciso tener claramente en cuenta la fuerza de rozamiento). Si realizamos un diagrama de cuerpo libre figura 1 A).

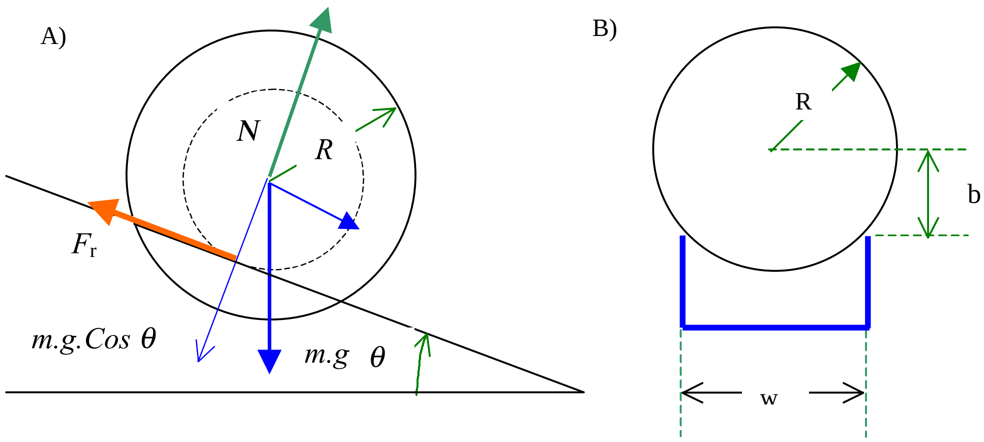

Figura 1. A) Diagrama de cuerpo libre de una esfera, de radio R, que rueda sobre una canaleta , de ancho W, en un plano oblicuo. La esfera interna que representa el punto de contacto con la canaleta. B) Vista frontal de la esfera en la canaleta, podemos observar los puntos de contacto entre ambas

Ahora, escribimos las ecuaciones que modelan el sistema.

$$F_r \,.\, b = I \,.\, \alpha \tag{1}$$

$$\alpha = \frac{a}{b} \tag{2}$$

$$m \,.\, g \,.\, \text{sen}\,\theta - F_r = m \,.\, a \tag{3}$$

$$I = \frac{2}{5} \,.\, m \,.\, R^2. \tag{4}$$

Si reemplazamos las ecuaciones (2) y (4) en la ecuación (1), y sumamos las ecuaciones (1) y (3), despejando, obtenemos:

$$a = \frac{g.\text{sen}\,\phi}{1+\frac{2}{5}.\left(\frac{R}{b}\right)^2} \tag{5}$$

Obtención de b:

$$R^2 = b^2 + \left(\frac{W}{2}\right)^2$$

$$b^2 = R^2 - \frac{W^2}{4} \tag{6}$$

Como podemos observar en la ecuación (5) la aceleración con la cual la esfera rueda por la canaleta inclinada, no depende de la fuerza de rozamiento. Sin embargo, ello es imprescindible para lograr que la esfera ruede.

Ahora, consideremos una circunferencia de diámetro D (ver figura 2) y una cuerda cualquiera L, que forma un ángulo θ con la horizontal. En este caso, la cuerda L, vendría a ser la canaleta por la que la esfera rueda.

El movimiento que realiza la esfera es un movimiento uniformemente acelerado. La ecuación que representa su movimiento es:

$$L = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \tag{7}$$

donde, L es la distancia recorrida, t el tiempo en que tarda en recorrer esa distancia y a la aceleración, representada en la ecuación (5).
Despejando el tiempo de la ecuación (7), obtenemos:

$$t = \sqrt{\frac{2.L}{a}} \qquad (8)$$

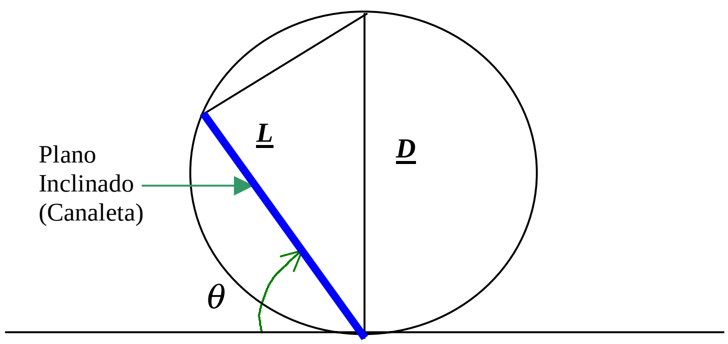

Figura 2. Circunferencia de diámetro D, para la determinación de la longitud L.

De la figura 2, por trigonometría llegamos a la siguiente relación:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{L}{D}. \qquad (9)$$

Reemplazando las ecuaciones (5) y (9), en la ecuación (8) y, ocupando b de la ecuación (6), obtenemos una expresión para el tiempo que tarda la esfera en recorrer la distancia L, en donde podemos observar que no depende del ángulo θ

$$t = \sqrt{\frac{2.D.(1+\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{R}{b}\right)^2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot D}{g}}\ \text{x}\ 1+\frac{2}{5}\left(\frac{R}{b}\right)^2 \qquad (10)$$

Podemos concluir, que el tiempo es el mismo para cualquier cuerda L de la circunferencia. Este es el enunciado del Teorema de las Cuerdas, generalizado aquí para una esfera que rueda sin deslizar.

Experimento

El dispositivo experimental simula a una circunferencia y a sus cuerdas. Consiste básicamente en una canaleta que representa las cuerdas de la circunferencia, por la que rueda una canica. La canaleta esta fija a una tabla de madera, la cual tiene posibilidad de cambiar su inclinación. Pegamos una cinta milimetrada en la madera, al costado de la canaleta, con el objetivo de establecer las distancias que la canica debe recorrer. Tomamos el tiempo de partida y llegada de la esfera mediante dos fotointerruptores, uno colocado en el punto donde la canica comienza a rodar, y el otro al final de la trayectoria. El ángulo de inclinación lo determinamos por trigonometría.

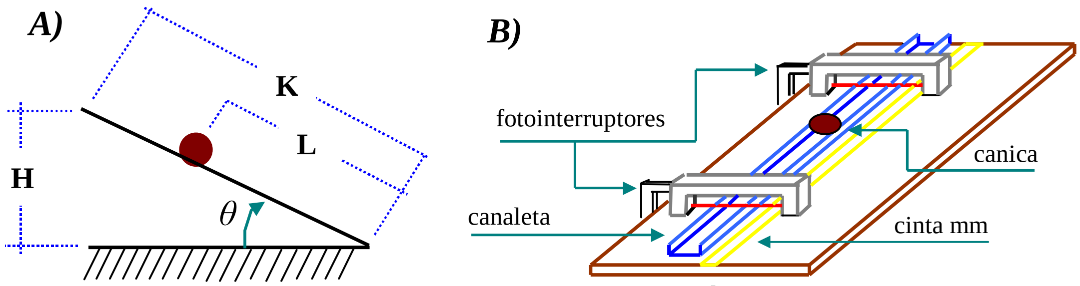

Figura 3. Dispositivo experimental
A) vista esquemática lateral. B) perspectiva del sistema.

Las longitudes H y K se midieron con un error de 1mm.
La canica pesa 6 gr.
El radio R de la canica es 8.93 cm.
El radio b de la esfera interna de la canica, es 4,89 cm.
La longitud de la canaleta es 30 cm.

Una vez armado el dispositivo experimental, calculamos las distancias L (cuerdas de la circunferencia) asociadas a cada inclinación del plano.

De la figura 3 por trigonometría llegamos a la siguiente relación,

$$\text{sen } \theta = \frac{H}{K} \qquad (9)$$

Para un K fijo, variamos las alturas H, y determinamos el ángulo θ Esto nos permitió determinar las distintas longitudes L para el diámetro D elegido.

Para las distintas longitudes de L , ubicamos la canica al inicio y la dejamos rodar cuesta abajo. Los fotointerruptores conectados aun programa adecuado, permitía medir los tiempos t que la canica tardó en recorrer las distintas cuerdas de la circunferencia.

Resultados

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 4. Mientras que los errores que tenemos que considerar para dar el error nominal de las mediciones de los tiempos es el siguiente.

Las mediciones de los distintos ángulos se realizaron por trigonometría considerando las distancias H y K de la fig. 3. Con un error de 0,001 m cada uno. Dichos errores nos dan una incerteza en cada ángulo de 0,002°. Otro error a tener en cuenta es el de los fotointerruptores de 0,001 s, y el de la longitud L de la figura 3 que es de 0,002 m. Obtenemos de esta forma un error nominal para las mediciones efectuadas de 0,003 s.

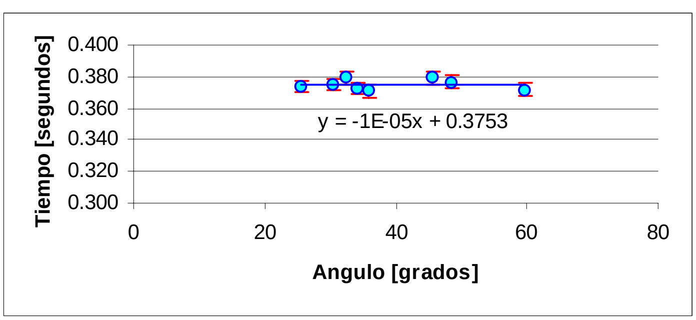

Figura 4. Representación de los valores de tiempo para cada ángulo

En la figura 4 podemos observar que los tiempos empleados por la canica para recorrer las distintas cuerdas de la circunferencia son constantes dentro de los errores de medición realizados.

Conclusión

Fue posible recrear el experimento de las cuerdas de Galileo utilizando un plano inclinado y fotointerruptores conectados a una PC.

Verificamos experimentalmente su validez para esferas que ruedan sin deslizar, obteniendo una analogía con lo estipulado por Galileo.

La presencia de roce no modifica las conclusiones obtenidas por Galileo. Es decir que el tiempo de caída por cualquier cuerda es siempre el mismo, ya sea que la partícula se deslice sin rozamiento o ruede como consecuencia del mismo.

Bibliografía

1. *Teorema De Las Cuerdas De Una Circunferencia De Galileo* - A. Periello, H. A. Cassia, R. Ferrazzo, M. Pagura, M. Basile , P. Pérez - Integrantes del grupo "Desarrollo de Medios Didácticos" U.T.N. Regional Buenos Aires, Medrano 951 (1179) Bs. As- Argentina.
2. *Noticias del Planeta Tierra, Galileo Galilei y la revolución científica*- BOIDO G., 1996. A-Z Editora-Buenos Aires.
3. *Física re-Creativa* S. GIL-E. RODRÍGUEZ*, 1 ^{a} ed.,* Buenos Aires, Prentice Hall, 2001.
4. *Física Universitaria, Volumen 2, 9 ^{a} ed.,* Sears-Semansky-Young-Freedman,1996. Addison Wesley Longman, Mexico, 1999.
5. 4-http://thales.cica.es./rd/Recursos/rd97/Biografias/11-1-b-galileo.html.