

# Máquina de Atwood con masa variable

Galarza Jorge, Viegner Alejandro, Palacios Pablo, Hesse Eugenia

Universidad Favaloro - Julio 2001

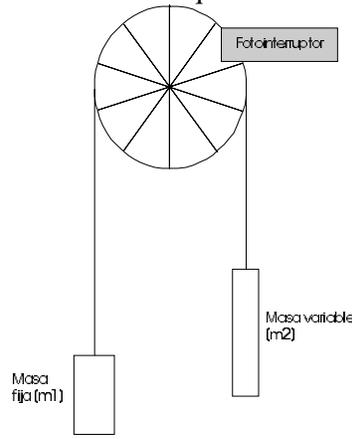
[Viegner@fibertel.com.ar](mailto:Viegner@fibertel.com.ar)

## Resumen

En este trabajo estudiamos el movimiento de una máquina de Atwood, en la cual una de sus masas variaba con el tiempo.

## Introducción

Una máquina de Atwood se ilustra esquemáticamente en la figura 1.



**Figura 1.** Sistema utilizado para realizar el experimento. La masa 1 era fija y la masa 2 variaba con el tiempo en forma constante

Lo original de nuestro sistema es que una de las masas del sistema variaba con el tiempo (en nuestro caso  $m_2$ ). Para lograr esto usamos una cápsula con un orificio en su base. El tubo contenía arena lo suficientemente fina, como para que pueda salir por el orificio. Para estudiar el flujo de arena que despidió el sistema se realizó un experimento que se discute en el apéndice, y que permite encontrar la variación de la masa en función del tiempo.

El resultado de nuestro estudio es que la masa  $m_2$  varía linealmente en el tiempo según:

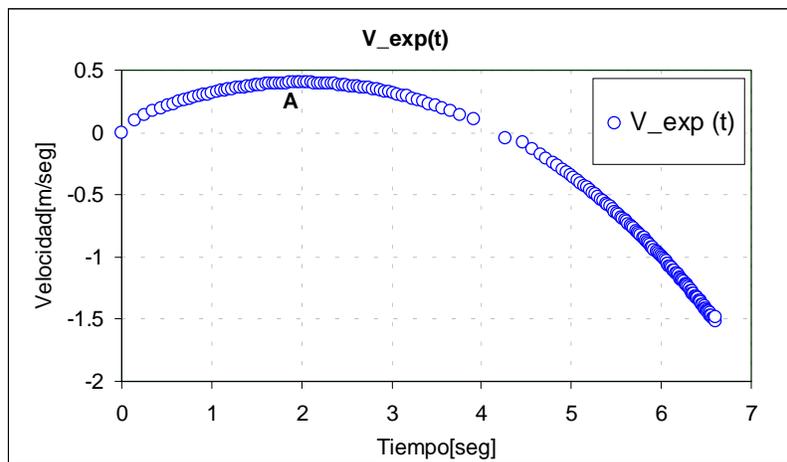
$$m_2(t) = m_0 - \lambda \cdot t$$

## Desarrollo experimental

La primera parte de nuestro trabajo consistió en averiguar el flujo de arena a través del agujero del tubo y la fuerza de roce de la polea. En los apéndices 1 y 2 se encuentra el método experimental utilizado para llegar a estos datos. Aquí nos limitaremos a describir los resultados.

En la segunda parte del trabajo se estudia la dinámica de la máquina de Atwood con la masa variable.

En primer lugar armamos el sistema usando una polea y un hilo delgado, sujetando a uno de sus extremos la masa constante y al otro extremo la masa que variaba con el tiempo (tubo metálico lleno de arena con un agujero en su base). Tuvimos especial cuidado en que la diferencia de masa entre la masa fija y la masa variable inicial del tubo de arena no fuera demasiado grande. De esta forma ambos cuerpos igualaban sus masas en un determinado instante (**A**) durante la medición. Dejamos al sistema en movimiento y usando un fotointerruptor conectado a una PC tomamos las mediciones con el objeto de obtener la velocidad en función del tiempo. Los valores medidos por la PC eran los intervalos de tiempo ( $\Delta t$ ) que tardaba la polea en moverse un cierto ángulo  $\Delta\theta = 36^\circ$ . Luego hicimos el cociente entre el ángulo  $\Delta\theta$  y los distintos  $\Delta t$  medidos por la PC, obteniendo así la velocidad angular de la polea en función del tiempo. Finalmente multiplicamos esta velocidad angular por el radio de la polea (medido con el calibre). Así llegamos a la velocidad lineal de las masas en función del tiempo. En la Fig.2 se presentan los valores de velocidad en función de t.



**Figura 2.** Velocidad experimental del sistema

El gráfico 2 refleja lo que observamos durante el experimento. Los dos cuerpos se movieron inicialmente hacia una dirección, aumentando su velocidad con respecto al tiempo. A partir de un instante ésta comenzó a disminuir, hasta que los cuerpos se frenaron. Luego cambiaron su dirección de movimiento con velocidad en aumento.

Según el apéndice 2 tenemos que:

$$m(t) = m_0 - \lambda \cdot t \quad (\text{masa del tubo con arena en función del tiempo})$$

De la definición de velocidad:

$$v(t) = v(t - \Delta t) + a(t) \cdot \Delta t$$

Según el apéndice 3:

$$a(t) = \frac{(m_1 - m_2(t)) \cdot g - F_r}{m_1 + m_2(t) + 0.5 \cdot m_p} \quad (1)$$

Para obtener los parámetros de esta expresión consideramos a la polea como un disco macizo, por lo que tomamos al momento de inercia de la polea como, y el momento de torsión de la fuerza de roce  $F_r \cdot R$  ( $R$  es el radio de la polea).

**Parámetros del sistema**

$R =$	$(4.9 \pm 0.5) \text{ mm}$	(Radio de la polea medido con un calibre)
$\lambda =$	$(1.8 \pm 0.1) \text{ g/s}$	(flujo de arena a través del agujero del tubo)
$M(\text{cte.}) =$	$(45 \pm 0.1) \text{ g}$	(masa de la masa constante)
$M_0(\text{var}) =$	$(49 \pm 0.1) \text{ g}$	(masa inicial de la masa variable)
$M_p =$	$5.5 \text{ g}$	(masa de la polea)
$F_r =$	$0.004 \text{ Kg} \cdot \text{m} / \text{s}^2$	(fuerza de roce de la polea con su eje de rotación)

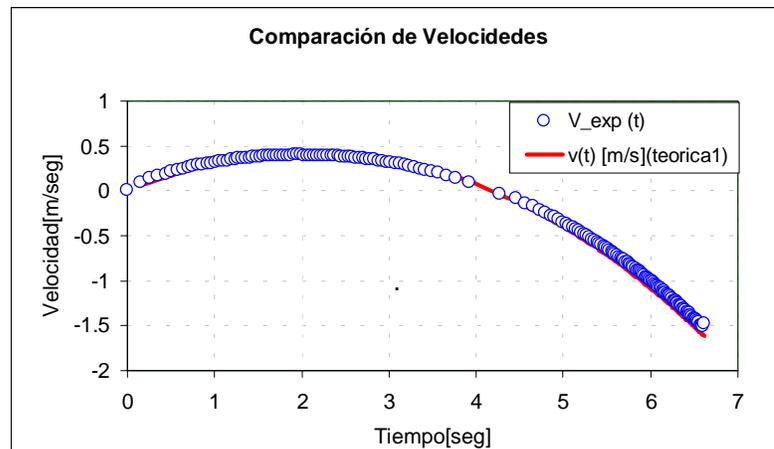
De esta manera pudimos calcular las velocidades en función del tiempo en forma teórica. Luego graficamos las velocidades teóricas junto con la velocidad experimental, en el cual se pudo ver que la velocidad obtenida en forma teórica mediante la ecuación (1) se parecía a la velocidad experimental, pero con un cierto error.

Para corregir el valor anterior de velocidad procedimos de la siguiente manera:

Tomamos un hilo delgado y lo enrollamos cinco veces en la polea, luego medimos esa longitud del hilo y utilizamos la fórmula que afirma que el perímetro de una circunferencia es igual a  $2\pi R$  y llegamos a un nuevo valor para el radio de la polea:

- $R = (24,12 \pm 0.01) \text{ mm}$

También procedimos sucesivamente a cambiar el valor de la masa inicial del tubo de arena y observamos que los datos teóricos aproximaban mejor a los datos experimentales si tomábamos  $m_0(\text{var}) = 49.4 \text{ g}$  (masa inicial de la masa variable). El gráfico resultante fue:



**Figura 3.** Velocidad experimental comparada con la velocidad calculada en forma teórica según (1)

En el gráfico 3 se ve claramente que la velocidad obtenida en forma teórica ajusta perfectamente a la velocidad lineal.

## ***Discusión***

Pudimos llegar a un mismo resultado de dos formas distintas: experimentalmente y teóricamente. Esto quiere decir que la ecuación (1), propuesta para describir la aceleración en función del tiempo para un sistema de masa variable como el que analizamos, es válida.

## ***Conclusión***

Nuestro principal objetivo al realizar este trabajo era el de encontrar una ecuación que describa el movimiento de una máquina de Atwood, en la cual una de sus masas variaba con el tiempo. Dicha ecuación es la ecuación (1):

$$a(t) = \frac{(m_1 - m_2(t)) \cdot g - F_r}{m_1 + m_2 + 0.5 \cdot m_p}$$

## ***Apéndice 1***

### ***Fuerza de roce***

### ***Resumen***

A continuación describiremos el método experimental utilizado para calcular el valor de la fuerza de roce de una polea con su eje de rotación.

### ***Método experimental***

Tomamos dos pesas con masas distintas y armamos una máquina de Atwood con el hilo delgado y la polea (como se puede ver al principio del trabajo). Dejamos al sistema en movimiento y mediante el fotointerruptor conectado a una PC tomamos las mediciones. Los valores medidos eran los intervalos de tiempo ( $\Delta t$ ) que tardaba la polea en moverse un cierto ángulo  $\Delta\theta=36^\circ$ . Luego hicimos el cociente entre el ángulo  $\theta$  y los distintos  $\Delta t$  medidos por la PC, obteniendo así la velocidad angular de la polea en cada  $\Delta t$ . Finalmente multiplicamos esta velocidad angular por el radio de la polea (medido con el calibre). Así obtuvimos la velocidad lineal de las masas en cada  $\Delta t$ . Graficamos la velocidad lineal con respecto al tiempo y aproximamos mediante cuadrados mínimos. La pendiente de la recta aproximada era la aceleración de las masas. Repetimos lo mismo para otros cinco juegos de masas.

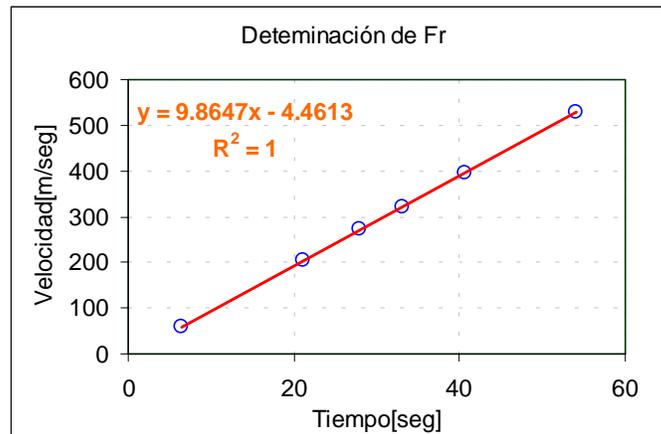
Planteamos las ecuaciones que ya conocemos para una máquina de Atwood con masas constantes y obtuvimos la siguiente expresión para el sistema:

$$(m_1 + m_2 + 0.5 \cdot m_p) \cdot a = (m_1 - m_2) \cdot g - F_r \quad (\mathbf{A1.1})$$

Para llegar a esta expresión tomamos al momento de torsión de la fuerza de roce de la polea como  $F_r \cdot R$  ( $R$  es el radio de la polea) y al momento de inercia de la polea como  $0.5m_p R^2$ . A continuación graficamos para los distintos juegos de masas

$(m_1 + m_2 + 0.5 \cdot m_p) \cdot a$  en función de  $(m_1 - m_2)$ . Aproximamos mediante cuadrados mínimos y obtuvimos de esta manera una aproximación de la aceleración de la gravedad (la pendiente de la recta aproximada) y la fuerza de roce que buscábamos (la ordenada al origen).

### Resultados



**Figura 4.** Determinación gráfica de la fuerza de roce.

En el gráfico pudimos ver que el valor aproximado de  $g$  es  $(9.81 \pm 0.001) \text{m/s}^2$  y el de la fuerza de roce  $F_r$  es 0.004.

Estos valores fueron obtenidos después de hacer una mejora en nuestras mediciones, que consistió, como se describió anteriormente, en tomar un hilo delgado y enrollarlo cinco veces en la polea. Luego medimos esa longitud del hilo. Utilizamos la fórmula que afirma que el perímetro de una circunferencia es igual a  $2\pi R$  y llegamos a un nuevo valor para el radio de la polea:

### Discusión y conclusión

Pudimos ver que cuando medimos con más precisión el radio de la polea aproximó mejor el valor de  $g$ . De esta forma llegamos a que el la fuerza de roce antes dada.

## Apéndice 2

### Determinación del flujo de arena

#### Resumen

Para determinar el valor del flujo de arena, es decir, la pérdida de masa en función del tiempo, utilizamos un sensor de fuerza conectada a la PC para luego graficar la relación y obtener una función que lo describa. La razón de cambio de masa en el tiempo es el flujo.

### Método experimental

Luego de conectar el sensor de fuerza a la PC y con un programa adecuado, se colgó el tubo metálico lleno de arena. De los resultados se construye un gráfico, y se observó que la relación es de pérdida de masa y el tiempo es lineal,

$$V = 0.0017 \cdot t + 0.9425 \quad (\text{A2.1})$$

Debido al programa utilizado, las mediciones se tomaron en voltajes. Es necesario hacer una calibración para obtener los valores de voltaje correspondientes a los valores de masa. Para realizar la calibración se mide el voltaje producido por ciertas masas, cuyo valor es conocido (se tomaron masa entre 0 y 140 gramos). De los resultados se realiza un gráfico de voltaje en función de la masa, y se obtiene una función que describe la relación:

$$V = -1.025 \cdot m + 1.037 \quad (\text{A2.2})$$

Como se observa la relación es lineal. Hasta el momento tenemos dos expresiones para el voltaje. Se igualan las expresiones y se obtiene finalmente una expresión para el valor de la masa en función del tiempo. Se realiza el gráfico de esta expresión:

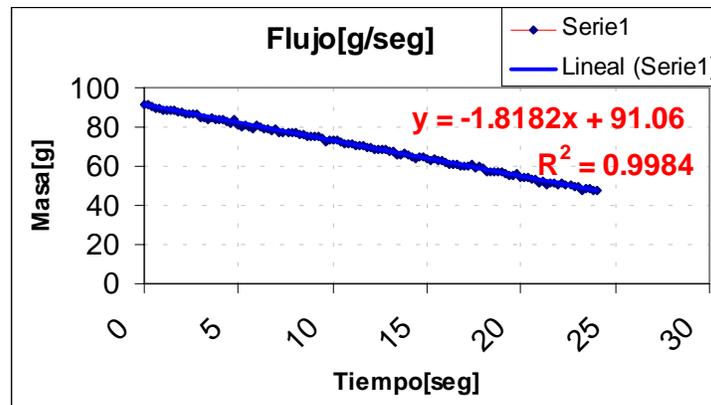


Gráfico 5. Determinación del flujo de arena

La relación entre el cambio de masa y el tiempo es lineal. La razón de cambio de la masa respecto del tiempo, es decir, la derivada es el valor del flujo. En este caso el flujo es:

$$\lambda = 1.8 \pm 0.1 \text{ g/s}$$

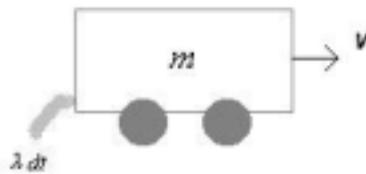
y podemos escribir en general:

$$m(t) = m_0 - \lambda \cdot t$$

siendo  $m_0$  la masa inicial.

### Apéndice 3

#### Movimiento con masa variable



Supongamos una situación como la que se muestra en la figura. Un carrito que se desplaza horizontalmente con una velocidad  $v$  y cuya masa varía con el tiempo de forma constante.

Deseamos estudiar el movimiento de dicho sistema, para ello tendremos en cuenta la cantidad de movimiento del sistema en un instante  $t$  y un instante después  $t+dt$ .

Una vez hecho esto operamos matemáticamente y llegamos a la conclusión que el carrito no se acelera por acción de la pérdida de masa, como lo demuestran las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 dP &= P(t + dt) - P(t) = (m + dm) \cdot (v + dv) + \lambda \cdot v \cdot dt - m \cdot v \\
 dP &= m \cdot v + m \cdot dv + dm \cdot v + dm \cdot dv + \lambda \cdot v \cdot dt - m \cdot v \\
 \frac{dP}{dt} &= m \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} \cdot v + \frac{dm}{dt} \cdot dv + \lambda \cdot v \\
 \frac{dP}{dt} &= m \cdot \frac{dv}{dt} - \lambda \cdot v - \underbrace{\lambda \cdot dv}_0 + \lambda \cdot v \\
 \frac{dP}{dt} &= m \cdot a
 \end{aligned}$$

Ahora planteando las ecuaciones de movimiento para nuestro sistema y teniendo en cuenta el resultado anterior, obtuvimos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 T_1 - m_1 \cdot g &= m_1 \cdot a \\
 m_1 \cdot g - T_2 &= m_2 \cdot a \\
 T_2 - T_1 - F_r &= \frac{I}{R^2} \cdot a
 \end{aligned}$$

Y resolviendo el sistema llegamos a la ecuación (1) utilizada anteriormente:

$$a(t) = \frac{(m_2(t) - m_1) \cdot g - F_r}{m_1 + m_2(t) + 0.5 \cdot m_p}$$

Si se hubiese ignorado el hecho que en la segunda ley de Newton  $\frac{dP}{dt}$  es un cociente diferencial hubiéramos obtenido:

$$a(t) = \frac{(m_2(t) - m_1) \cdot g - F_r + \lambda \cdot v}{m_1 + m_2(t) + 0.5 \cdot m_p}$$

la cual es incorrecta.

### Bibliografía

1. J. Roederer. Física Elemental. Bs. As. Argentina. Ed. Eudeba; 1960.
2. Making Atwood's Machine "Work" -Phys. Teacher. **Vol. 39**, 154 (2000).